Аннотация
Артыкбаевой Жанар Нурланкызы
на тему: «Спектральный анализ самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами», представленной на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по образовательной программе «8D05401-Математика»

Дифференциально-алгебраические уравнения с краевыми условиями играют ключевую роль в современных исследованиях как в теоретической, так и в прикладной математике. Они широко применяются для моделирования динамических систем, в которых наряду с дифференциальными соотношениями присутствуют алгебраические связи. Одной из центральных задач в этой области является изучение существования, единственности решений таких систем при различных типах краевых условий.

Актуальность исследования и обзор литературы. Анализ систем дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами в рамках современных исследований опирается на сочетание дифференциальных и алгебраических методов, а также на применение операторного аппарата при изучении их основных свойств. При этом классические методы спектрального анализа дифференциальных операторов не всегда позволяют учесть влияние алгебраических и граничных членов на структуру решений и спектр. Актуальность темы определяется необходимостью более глубокого исследования свойств дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами, включая вопросы самосопряжённости, базисности системы собственных и присоединённых функций и аналитических свойств резольвенты, что важно для развития теории операторов и прикладных задач математической физики. Интенсивное развитие теории дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) началось во второй половине XX века под влиянием задач, возникающих в механике и моделировании электрических цепей. Важную роль как с точки зрения теории, так и практики играет общая теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Со временем потребности практики расширили указанную теорию, включив изучение краевых задач для дифференциально-граничных уравнений. Область дифференциальных уравнении с граничными условиями, так называемые дифференциально-граничные уравнении, рассматривается в обзоре с 1900 года до настоящего времени, с особым акцентом на последние достижения. В 1911 году **Э. Хильб** [25] заметил, что сопряженные задачи к задачам для дифференциальных уравнений с интегральными условиями сводятся к дифференциальным граничным проблемам. В 1959 году **Филлипс Р.** [26] обнаружил подобный эффект и для гиперболических систем с частными

производными. В этой области одним из первых исследователей является **Филлипс Р.**, кто непосредственно работал с **дифференциально-граничными операторами**, и чьи исследования привели к более строгому пониманию природы этих уравнений. Он исследовал методы, связанные с минимальными и максимальными операторами и их диссипативными расширениями, что напрямую связано с понятием дифференциально-граничных уравнений. В работе [26] он исследовал максимально диссипативные операторы и тем самым указал на необходимость расширения дифференциальных операторов до дифференциально-граничных. И оно приводит к осознанию того, что в ряде случаев дифференциальные операторы переходят в **дифференциально-граничные операторы,** то есть содержат как дифференциальную часть, так и операторы на границе. Дифференциально-граничные задачи не являются задачами для чисто дифференциальных уравнений. Также отметим работу [27], где подобные уравнения относят к классу дифференциально-операторных уравнений. А по терминологии А.Кролла [28-33] дифференциально-граничные уравнения наряду с дифференциальными выражениями включают выражения, содержащие граничные значения искомой функции. Это утверждение тем более справедливо для дифференциально-алгебраических уравнений. Работы [34, 36], в основном сосредотачивает внимание на краевых задачах с двумя граничными условиями. Первые целенаправленные исследования краевых задач для дифференциально-алгебраических систем были связаны с вопросами регуляризации и согласования граничных условий. В рамках этих работ анализировались линейные ДАУ с классическими краевыми условиями, а также устанавливались условия корректности постановки задач. Диссертационная работа посвящена исследованию ряда задач теории дифференциальных уравнений и операторов, обладающих сложной структурой и представляющих научный интерес с точки зрения современного функционального анализа.

Научная новизна диссертационного исследования. В диссертационной работе получены результаты, относящиеся к спектральному анализу дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами.

1. Рассмотрен класс дифференциально-алгебраических операторов, в которых дифференциальная часть дополняется алгебраическими и граничными членами. Предложена постановка краевых задач, позволяющая корректно определить соответствующие самосопряжённые операторы.
2. Исследованы условия самосопряжённости дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами в рамках

рассматриваемых операторных моделей. Показано, что выбор граничных условий оказывает существенное влияние на операторные свойства.

3. Выполнен спектральный анализ самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами для исследуемого класса задач.
4. Исследованы вопросы базисности Рисса системы собственных и присоединённых функций самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами.
5. Получено представление резольвенты самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами и проанализированы её аналитические свойства в зависимости от спектрального параметра.

Таким образом, в диссертации систематизированы и развиты результаты, касающиеся спектрального анализа дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами. Рассматриваемые в главах 1–3 спектрально-операторные задачи для дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами ранее систематически не изучались.

Объектом исследования в настоящей диссертационной работе является класс дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами, а также линейные операторы, порождаемые этими уравнениями в функциональных пространствах.

Предмет исследования составляют спектральные характеристики и операторные свойства дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами, включая анализ условий самосопряжённости, описание областей определения соответствующих операторов, а также структура собственных и присоединённых функций, и условия базисности Рисса. Исследование сосредоточено на установлении взаимосвязи между алгебраическими ограничениями, граничными членами и спектральными свойствами соответствующих операторов, что позволяет рассматривать изучаемые задачи в единой постановке.

Основная цель диссертационного исследования. Целью диссертационного исследования является систематическое изучение дифференциально-граничных и дифференциально-алгебраических уравнений с алгебраическими и граничными членами, формулировка и исследование соответствующих самосопряжённых операторов, а также анализ их спектральных свойств, включая базисность Рисса системы собственных и присоединённых функций и аналитические характеристики резольвенты.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Изучить дифференциально-граничные и дифференциально-алгебраические уравнения с алгебраическими и граничными членами и предложить корректные постановки краевых задач.
2. Исследовать условия самосопряжённости операторов, порождённых рассматриваемыми уравнениями, и их связь с решениями краевых задач.
3. Провести спектральный анализ самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов.
4. Исследовать базисность Рисса системы собственных и присоединённых функций для выбранного класса операторов.
5. Получить представление резольвенты операторов и проанализировать её аналитические свойства.

Связь диссертационной работы с научно-исследовательскими проектами:

Диссертационная работа выполнялась в период участия автора в ряде научно-исследовательских проектов, финансируемых Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан:

проект № AP22783101 на тему “Задачи идентификации зависящих от времени коэффициентов в уравнениях диффузии с дробной производной по времени и нелокальными граничными условиями”;

проект AP23485971 на тему “Параболическое уравнение с дробной производной по времени и двумерным оператором Гамильтониана: задача начального значения и задачи определения коэффициентов”.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечиваются последовательным применением методов функционального анализа и спектральной теории линейных операторов, адекватных исследуемому классу дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами. Корректность выводов подтверждается публикацией основных результатов в рецензируемых научных изданиях, а также их отражением в материалах международных научных конференций.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертационной работе, получили профессиональное обсуждение в рамках международных научных конференций и научных семинаров, включая конференции, проводившиеся за рубежом:

-“Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Казахстанского дня работников науки” (Алматы, 2023),

-“Уфимская осенняя математическая школа—2024” международная конференция, (Уфа, 2024),

-международная научная конференция студентов и молодых ученых “Фараби Алеми” (Алматы, 2024),

-“Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании” международная научно-практическая конференция (Ош, 2024),

-Seventh International Conference on Analysis and Applied Mathematics (Turkey, 2024),

-International Conference “Actual problems of analysis, differential equations and algebra” (Astana, 2025),

-15th ISAAC Congress (Astana, 2025),

-“Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Казахстанского дня работников науки” (Алматы, 2025),

-International Conference FAIA, (Turkey, 2025),

-Международная научная конференция, “Актуальные вопросы междисциплинарных научных исследований”, (Караганда, 2025),

-International Conference AIP, (Рио-де-Жанейро, 2025),

-“9th Young Scholar Symposium of the East Asia Section of Inverse Problems International Association”, (Киото, 2025),

-Trends in Analysis and Differential Equations (Turkestan, 2026).

Публикации. Основные достижения исследования отражены в пяти статьях и одинадцати тезисах, включённых в работы [72, 73]–[85-98]. Из них две статьи относятся к квартилю Q1 в базе данных Scopus: первая статья имеет процентиль 81, а вторая — 93.

1.Artykbayeva Zh., Kanguzhin B.“Differential–boundary equations with algebraic terms and associated boundary value problems.” *Carpathian Journal of Mathematics.* 41 (4), (2025): 899–912. **(Scopus percentile – 81, quartile – Q1).**

2. Artykbayeva, Zh., Kanguzhin, B. “Self-Adjoint Differential-Algebraic Operators With Boundary Terms.” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (2026):1–26. **(Scopus percentile – 93, quartile – Q1).**

3. Artykbayeva, Zh., Kanguzhin, B. “Differential-algebraic equations with boundary terms.” *International Journal of Mathematics and Physics*, *16*(1), (2025): 61-72. **(Scopus percentile – 7, quartile – Q4).**

4. Artykbayeva Zh.N., Mirzakulova A.E., Assilkhan A.A. “Analytical solution of initial value problem for ordinary differential equation with singular perturbation and piecewise constant argument.” *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 122, (2). (2024): 1-13. **(Scopus percentile – 18, quartile – Q4).**

5.Artykbayeva Zh.N., Mirzakulova A.E. “Long-term analysis of solutions with initial jumps in singularly perturbed equations.” *International Journal of Mathematics and Physics* 15, (2). (2024): 110-118. **(Scopus percentile – 7, quartile – Q4).**